AGREGATION de MATHEMATIQUES

SESSION DE 1987

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Dans tout le problème, on fixe un entier n strictement positif, et on note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

On munit E de sa structure standard d'espace euclidien. Pour x et y dans E, on note $\|x\|$ la norme de x et $x \cdot y$ le produit scalaire de x et y; si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on a donc :

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \quad \|x\|^2 = x \cdot x.$$

On note O l'élément neutre de $(E, +)$.

On note $\mathfrak{I}_s$ le groupe des applications *affines* isométriques de E dans lui-même, $\mathcal{O}$ le sous-groupe de $\mathfrak{I}_s$ formé des applications *linéaires* isométriques (le groupe orthogonal de E), $\mathfrak{T}$ le sous-groupe formé des translations; si x appartient à E, on note t_x la translation de vecteur x; si X est une partie de E, on note $\mathfrak{T}_X$ l'ensemble des translations dont les vecteurs sont dans X; on note I l'application identité de E, translation de vecteur nul.

On note $\mathcal{L}$ l'algèbre End (E) des applications linéaires de E dans E. On munit $\mathcal{L}$ de la norme des opérateurs : la norme d'un élément f de $\mathcal{L}$ est

$$\|f\| = \sup \{ \|f(x)\| ; \|x\|, x \in E, x \neq 0 \}.$$

On munit $\mathcal{L}$ et ses sous-ensembles de la topologie induite par cette norme.

Si Γ est un groupe et α, β deux éléments de Γ, on note $[\alpha, \beta]$ le commutateur $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ de α et β. On rappelle qu'un sous-groupe Δ de Γ est dit *distingué* (ou *normal*) si, quels que soient α dans Δ et β dans Γ, alors $\beta\alpha\beta^{-1}$ appartient à Δ.

Pour tout entier g strictement positif, on note $\mathbb{N}_g$ l'ensemble des entiers de 1 jusqu'à g.

Un sous-groupe G de $\mathfrak{I}_s$ est dit *cristallographique* s'il vérifie les deux conditions C1 et C2 suivantes :

C1. — Il existe un nombre réel d tel que, pour tout vecteur x de E, il existe un élément α de G vérifiant $\|\alpha(0) - x\| \leqslant d$.

C2. — Quel que soit le nombre réel T, il existe seulement un nombre fini d'éléments α de G vérifiant $\|\alpha(0)\| \leqslant T$.

Le but du problème est la démonstration du théorème suivant, dû à L. BIEBERBACH.

THÉORÈME : Tout sous-groupe cristallographique de $\mathfrak{I}_s$ contient n translations linéairement indépendantes.

I. PRÉLIMINAIRES

A. DÉCOMPOSITION DES ÉLÉMENTS DE $\mathfrak{I}_s$.

1. Soit α un élément de $\mathfrak{I}_s$; montrer qu'il existe un et un seul élément (a, A) de $E \times \mathcal{O}$ tel que $\alpha = t_a \circ A$.

   NOTATION : on pose $a = \tau(\alpha)$, $A = \pi(\alpha)$, et on note π l'application $\alpha \longrightarrow \pi(\alpha)$ de $\mathfrak{I}_s$ dans $\mathcal{O}$, τ l'application $\alpha \to \tau(\alpha)$ de $\mathfrak{I}_s$ dans E.

2. Prouver que π est un morphisme de groupes de $\mathfrak{I}_s$ dans $\mathcal{O}$.

   Déterminer son image et son noyau.

3. Si G est un sous-groupe de $\mathfrak{I}_s$, prouver que $G \cap \mathfrak{T}$ est un sous-groupe abélien distingué de G.

   Soit α un élément de $\mathfrak{I}_s$. Posons $a = \tau(\alpha)$ et $A = \pi(\alpha)$.

4. Soit x un vecteur de E; prouver qu'on a

$$\alpha \circ t_x \circ \alpha^{-1} = t_{A(x)}.$$

   Soit β un autre élément de $\mathfrak{I}_s$. Posons $b = \tau(\beta)$ et $B = \pi(\beta)$.

5. Calculer $\tau(\alpha\beta)$ en fonction de a, A, b et B.

6. Calculer $\tau(\alpha^{-1})$ et $\pi(\alpha^{-1})$ en fonction de a et A.

7. Posons $\gamma = [\alpha, \beta]$. Prouver qu'on a

$$\pi(\gamma) = [A, B]$$
$$\text{et } \tau(\gamma) = (A - I)(b) + (I - [A, B])(b) + A(I - B)A^{-1}(a).$$

B. ÉTUDE DE LA NORME D'OPÉRATEURS.

Si f est un élément de $\mathcal{L}$, on note f^* l'endomorphisme adjoint de f.

1. Montrer que l'application $f \longrightarrow f^* f$ de $\mathcal{L}$ dans lui-même est continue. Prouver que $\mathcal{O}$ est compact et que les applications $(A, B) \longrightarrow AB$ de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ et $A \longrightarrow A^{-1}$ de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ sont continues.

2. Soit f un élément de $\mathcal{L}$. Montrer que $f^* f$ est diagonalisable dans une base orthonormale de E, que ses valeurs propres sont des nombres réels positifs et que $\|f\|^2$ est la plus grande valeur propre de $f^* f$.

   Pour tout élément f de $\mathcal{L}$, on note E_f l'ensemble des vecteurs x de E vérifiant $\|f(x)\| = \|f\| \cdot \|x\|$.

3. Soit f un élément de $\mathcal{L}$. Prouver que E_f est un sous-espace vectoriel de E, non réduit à $\{0\}$.

4. Quels sont les éléments f de $\mathcal{L}$ pour lesquels E_f est E tout entier ?

5. Soient f dans $\mathcal{L}$ et A dans $\mathcal{O}$. Prouver qu'on a

$$Af = fA = {}^tAf.$$

   Pour tout élément A de $\mathcal{O}$, on pose $m(A) = \|A - I\|$ et on note M_A l'espace vectoriel E_{A-I}, $M_A^\perp$ son orthogonal dans E.

6. Soit A un élément de $\mathcal{O}$, prouver que M_A et $M_A^\perp$ sont stables par A.

7. Soient A et B dans $\mathcal{O}$, prouver qu'on a

$$m([A, B]) = \|AB - BA\|$$

   et en déduire l'inégalité

$$m([A, B]) \leqslant 2\, m(A)\, m(B)$$

Tournez la page S. V. P.

Soit A dans $\mathcal{O}$; si $M_A^\perp$ est réduit à $\{0\}$ on pose $m^\perp(A) = 0$, sinon, on pose

$$m^\perp(A) = \sup \{ \| A(x) - x \| / \| x \| \mid x \in M_A^\perp, x \neq 0 \}.$$

8. Soit A dans $\mathcal{O}$; prouver qu'on a

$$0 \leqslant m(A) - m^\perp(A) \leqslant 2.$$

9. Quels sont les éléments A de $\mathcal{O}$ tels que $m(A) = m^\perp(A)$?

10. Quels sont ceux vérifiant $m(A) = m^\perp(A) + 2$?

II. ÉTUDE DES SOUS-GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES FORMÉS DE TRANSLATIONS

On dit qu'un sous-groupe de $(E, +)$ est un *réseau* s'il est engendré par les vecteurs d'une base de E. Dans cette partie II, on considère un sous-groupe L de $(E, +)$ et on note $\mathfrak{T}_L$ le sous-groupe de $\mathfrak{T}$ associé à L. On veut prouver qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{T}_L$ soit cristallographique est que L soit un réseau.

A. On suppose d'abord que L est un réseau. Prouver que $\mathfrak{T}_L$ est cristallographique.

B. Soit maintenant L un sous-groupe quelconque de $(E, +)$. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs de L.

1. Prouver que si F est distinct de E, $\mathfrak{T}_L$ n'est pas cristallographique.

2. En déduire que si $\mathfrak{T}_L$ est cristallographique, alors L contient n vecteurs de E linéairement indépendants.

C. Soient L un sous-groupe de $(E, +)$ tel que $\mathfrak{T}_L$ est cristallographique et $w_1, \ldots, w_n$ n vecteurs de E, linéairement indépendants, contenus dans L. On note $l_1, \ldots, l_n$ les applications coordonnées dans la base $(w_1, \ldots, w_n)$ de E.

Soient x et y deux éléments de E; nous dirons qu'on a $x \leqslant y$ si $x = y$ ou s'il existe k dans $\mathbb{N}_n$ tel qu'on ait $l_i(x) = l_i(y)$ pour tout i dans $\mathbb{N}_n$ strictement plus *grand* que k et $l_k(x) < l_k(y)$.

1. Prouver que la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E et que tout sous-ensemble fini non vide de E admet un plus petit élément pour cet ordre.

Soit V l'ensemble des vecteurs *non nuls* de L vérifiant $0 \leqslant l_i(x) \leqslant 1$ pour tout i dans $\mathbb{N}_n$.

2. Prouver que V est fini et qu'il existe une suite $v_1, \ldots, v_n$ de vecteurs dans V, uniquement déterminée par les conditions (i) et (ii) suivantes :

(i) v_1 est le plus petit élément de V;

(ii) pour tout k dans $\mathbb{N}_{n-1}$, si on note F_k le sous-espace vectoriel de E engendré par $v_1, \ldots, v_k$, alors v_{k+1} est le plus petit élément de V n'appartenant pas à F_k.

3. Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E et qu'on a

$$0 < l_j(v_j) \leqslant 1$$
$$\text{et} \qquad l_i(v_j) = 0$$

pour tout j dans $\mathbb{N}_n$ et tout i dans $\mathbb{N}_n$ tels que $i > j$.

On note L' le réseau de E engendré par $v_1, \ldots, v_n$.

4. Prouver que pour tout x dans L, il existe x' dans L' tel que, pour tout j dans $\mathbb{N}_n$, on ait

$$0 \leqslant l_j(x - x') < l_j(v_j).$$

5. Montrer qu'on a $L = L'$.

III. RÉSEAUX ET GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES

Pour tout sous-groupe L de $(E, +)$, on note S_L le stabilisateur de L dans $\mathcal{O}$, Σ_L le stabilisateur de L dans $\mathcal{S}$:

$$S_L = \{ A \in \mathcal{O}, A(L) = L \}$$
$$\Sigma_L = \{ \alpha \in \mathcal{S}, \alpha(L) = L \}.$$

A. Soit L un sous-groupe de $(E, +)$.

1. Prouver qu'on a $\Sigma_L \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_L$.

2. Soit G un sous-groupe de $\mathcal{S}$ tel que $G \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_L$.
Montrer que $\pi(G)$ est inclus dans S_L.

3. Soit G un sous-groupe de $\mathcal{S}$ tel que $G \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_L$.
Supposons en outre que G est inclus dans Σ_L.
Prouver que l'application (τ, π) de $\mathcal{S}$ dans $E \times \mathcal{O}$ induit une bijection de G dans $L \times \pi(G)$. Expliciter la loi de groupe sur $L \times \pi(G)$ transportée de celle de G par cette bijection.

B. Soient L un réseau de E et G un sous-groupe de $\mathcal{S}$ tel que $G \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_L$.

1. Montrer que S_L est fini.

2. Montrer que $\mathfrak{T}_L$ est d'indice fini dans G.

3. Prouver que G est cristallographique.

C.1. Pour cette question seulement, supposons $n = 1$ et prenons pour L le réseau Z de $E = \mathbb{R}$. Décrire les sous-groupes G de $\mathcal{S}$ tels que $G \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_L$.

2. Pour cette question seulement, supposons $n = 2$ et prenons pour L le réseau Z^2 de $E = \mathbb{R}^2$. Calculer le cardinal de S_L.

D. Soient L un réseau de E et G un sous-groupe de $\mathcal{S}$ tel que $G \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_L$. Soit H un sous-groupe *abélien* de G, *distingué* dans G.

1. Pour x dans L et A dans $\pi(H)$ prouver qu'on a $(A - I)^2(x) = 0$ (on pourra utiliser le fait que si un élément x de G vérifie $A = \pi(\alpha)$, alors α commute à $t_x \alpha t_{-x}$).

2. Prouver qu'on a $H \subset \mathfrak{T}$.

3. Que peut-on dire si G est abélien ?

IV. PREUVE DU THÉORÈME

Dans cette partie IV du problème, on fixe un sous-groupe cristallographique G de $\mathcal{S}$ et on choisit un nombre réel $d > 0$ tel que la condition C1 soit vérifiée.

A. Soit u un vecteur unitaire de E.

1. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers naturels $(k_q)_{q \in \mathbb{N}}$ et une suite $(\beta_q)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G telles que

(i) pour tout entier naturel q, on ait $\| \tau(\beta_q) - k_q u \| \leqslant d$;

(ii) la suite $(\pi(\beta_q))_{q \in \mathbb{N}}$ converge.

Tournez la page S. V. P.

2. En déduire qu'il existe une suite $(\beta'_q)_{q\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G telle que $\tau(\beta'_q)$ soit non nul à partir d'un certain rang, que $\pi(\beta'_q)$ converge vers Γ et que $\dfrac{u\cdot\tau(\beta'_q)}{\|\tau(\beta'_q)\|}$ converge vers 1.

(On pourra prendre β'_q de la forme $\beta_r\beta_q^{-1}$, où l'entier r est convenablement choisi.)

B. Pour toute partie non vide X de G, on pose $\delta(X) = \inf_{\alpha\in X}\|\tau(\alpha)\|$.

1. Soit X une partie non vide de G. Prouver qu'il existe un élément α de X tel que $\|\tau(\alpha)\| = \delta(X)$.

Dans la suite de cette partie IV.B, on note Y l'ensemble des éléments α de G tels que $0 < n.(\pi(\alpha)) \leqslant 1/2$.

On désire prouver par l'absurde que Y est vide.

2. Jusqu'en IV.B.5, supposons que Y est non vide et choisissons α dans Y tel que $\|\tau(\alpha)\| = \delta(Y)$. Posons $A = \pi(\alpha)$, $a = \tau(\alpha)$ et notons p, q les projecteurs orthogonaux sur les espaces M_A et $M_A^\perp$ respectivement, sous-espaces de E associés à A en I.B.

Prouver qu'il existe un élément β de G tel que, posant $B = \pi(\beta)$ et $b = \tau(\beta)$, on ait

$$\|q(b)\| < \|p(b)\| \qquad \text{et} \qquad m(B) \leqslant \frac{1}{8}\Big(m(A) - m^\perp(A)\Big).$$

(On pourra choisir un vecteur unitaire u de E et utiliser II.A.)

Soit Z l'ensemble des éléments de G vérifiant ces conditions, et choisissons $\beta\in Z$ tel que $\|\tau(\beta)\| = \delta(Z)$.

Posons $B = \pi(\beta)$, $b = \tau(\beta)$, $\gamma = [\alpha, \beta]$. On pose $C = \pi(\gamma), c = \tau(\gamma)$ (calculés en I.A.7) et $r = c - (A - I)b$.

3. Prouver qu'on a $m(C) \leqslant m(B)$.

4. Si β est une translation, vérifier qu'on a $r = 0$, $\|q(c)\| < \|p(c)\|$ et $\|c\| < \|b\|$.

5. Supposons que β n'est pas une translation; prouver successivement :

(i) $\|a\| \leqslant \|b\|$

(ii) $\|r\| \leqslant 2\, m(B)\, \|b\|$

(iii) $\|r\| < \dfrac{1}{2}(m(A) - m^\perp(A))\,\|p(b)\|$

(iv) $\|q(c)\| < \dfrac{1}{2}(m(A) + m^\perp(A))\,\|p(b)\| < \|p(c)\|$

(v) $\|c\| < \|b\|$

6. Déduire de ce qui précède que Y est vide.

7. En choisissant une base de E formée de vecteurs unitaires, prouver qu'il existe une base $(w_1, \ldots, w_n)$ de E telle que tw_i soit dans G pour tout entier i dans $\mathbb{N}_n$.

8. Posant $L = \tau(G \cap \mathfrak{G})$, prouver que L est un réseau de E.